DAFTAR ISI

BAB 2 BARISAN

BAB 2

BARISAN

2.1 DEFENISI BARISAN

Barisan adalah Himpunan bilangan-bilangan $u_1, u_2, u_3, \ldots$ dengan urutan penyusunan yang pasti (dengan kata lain korespondensi dengan bilangan-bilangan asli) dan tersusun menurut suatu aturan yang pasti. Setiap bilangan dalam barisan disebut suku, u_n disebut suku ke-n. Barisan disebut terhingga atau tak terhingga tergantung pada terhingga atau tidak terhingganya banyaknya suku. Barisan $u_1, u_2, u_3, \ldots$ juga dinyatakan secara ringkas dengan $\{u_n\}$.

Contoh

1. Himpunan bilangan-bilangan 2,7,12,17, …, 32 adalah barisan terhingga; suku-n ditentukan oleh $u_n = 2 + 5(n-1) = 5n - 3, n = 1,2, \ldots, 7$.
2. Himpunan bilangan-bilangan $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ adalah barisan tak terhingga dengan suku-n, yaitu $u_n = \frac{1}{(2n-1)}, n = 1, n = 1, 2, 3, \ldots$

2.2 LIMIT SUATU BARISAN

Sebuah bilangan l disebut limit dari barisan tak terhingga $u_1, u_2, u_3, \ldots$ jika untuk setiap bilangan sebarang positif ϵ kita dapat menentukan sebuah bilangan N positif yang tergantung pada ϵ sedemikian sehingga $|u_n - 1| < \epsilon$ untuk semua bilangan bulat $n > N$. Di dalam kasus semacam ini kita menulis $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

Contoh :

Jika $u_n = 3 + \frac{1}{n} = \frac{(3n+1)}{n}$, maka barisannya adalah $4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \ldots$ dan kita dapat melihat bahwa $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$.

Jika limit barisan ada, maka barisan tersebut disebut barisan konvergen; jika tidak, maka barisan tersebut disebut barisan divergen. Sebuah barisan dapat konvergen hanya ke satu limit, dengan kata lain, jika suatu limit ada, maka limit tersebut adalah limit yang unik.

2.3 TEOREMA LIMIT BARISAN

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dan $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \,.\, b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = AB$
4. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$ jika $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$

   Jika $B = 0$ dan $A \neq 0$, maka $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ tidak ada.

   Jika $B = 0$ dan $A = 0$, maka $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ mungkin ada atau mungkin tidak ada.
5. $\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p = A^p$, untuk $p =$ sebarang bilangan real jika A^P ada.
6. $\lim_{n\to\infty} p^{a_n} = p^{\lim_{n\to\infty} a_n} = p^A$ untuk $p =$ sebarang bilangan real jika p^A ada.

2.4 KETAKTERHINGGAAN

Kita menulis $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, jika untuk setiap bilangan positif M kita dapat menentukan sebuah bilangan postif N (yang nilainya tergantung pada M) sedemikian sehingga $a_n > M$ untuk semua $n > N$. Dengan cara yang sama, kita menulis $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ jika untuk setiap bilangan positif M kita dapat menentukan sebuah bilangan positif N sedemikian sehingga $a_n < -M$ untuk semua $n > N$. Harus ditekankan bahwa ∞ dan $-\infty$ bukanlah merupakan bilangan dan barisan-barisan tersebut tidak konvergen. Terminologi yang digunakan semata-mata hanya mengindikasikan bahwa barisan-barisan tersebut divergen dengan cara tertentu. Artinya, seberapapun besarnya bilangan dalam nilai mutlak yang dipilih, terdapat n sedemikian sehingga nilai mutlak a_n adalah lebih besar daripada nilai tersebut.

2.5 BARISAN MONOTONIK TERBATAS

Jika $u_n \leq M$ untuk $n = 1, 2, 3, ...$, di mana M adalah sebuah konstanta (yang tidak tergantung pada n), maka kita mengatakan bahwa barisan $\{u_n\}$ adalah terbatas di atas dan M disebut batas atas. Jika $u_n \geq m$, maka barisan tersebut adalah terbatas di bawah dan m disebut batas bawah.

Jika $u_{n+1} \geq u_n$, maka barisan disebut bertambah secara monotonik; jika $u_{n+1} > u_n$ maka barisan disebut bertambah sepenuhnya. Demikian juga, jika $u_{n+1} \leq u_n$ maka barisan disebut berkurang secara monotonik, sedangkan jika $u_{n+1} < u_n$ maka barisan disebut berkurang sepenuhnya.

Contoh

1. Barisan $1; 1{,}1; 1{,}11; 1{,}111; ...$ adalah terbatas dan bertambah dan bertambah secara monotonik, barisan ini juga bertambah sepenuhnya.

2. Barisan $1; -1; 1; -1; 1; \ldots$ adalah terbatas tetapi tidak bertambah secara monotonik.
3. Barisan $-1;\ -1{,}5;\ -2; -2{,}5; -3; \ldots$ adalah berkurang secara monotonik dan tidak terbatas. Akan tetapi, barisan tersebut terbatas diatas.

2.6 BATAS ATAS TERKECIL DAN BATAS BAWAH TERBESAR SUATU BARISAN

Sebuah bilangan $\underline{M}$ disebut batas atas terkecil suatu barisan $\{u_n\}$ jika $u_n \leq \underline{M},\ n = 1, 2, 3, \ldots$ di mana terdapat setidaknya satu suku yang lebih besar daripada $\underline{M} - \epsilon$ untuk sebarang $\epsilon > 0$.

Sebuah bilangan $\underline{m}$ disebut batas bawah terbesar suatu barisan $\{u_n\}$ jika $u_n \geq \overline{m}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ di mana terdapat setidaknya satu suku yang lebih kecil daripada $\overline{m} + \epsilon$ untuk sebarang $\epsilon > 0$.

Bandingkan defenisi ini dengan defenisi batas atas terkecil dan batas bawah terbesar untuk himpunan bilangan secara umum (lihat halaman 5 Bab 1).

2.7 LIMIT SUPERIOR, LIMIT INFERIOR

Sebuah bilangan $\bar{l}$ disebut limit superior, limit terbesar atau limit atas (lim sup atau $\overline{\lim}$) dari suatu barisan $\{u_n\}$ jika tak terhingga banyaknya suku-suku barisan lebih besar daripada $\bar{l} - \epsilon$ tetapi hanya terdapat terhingga banyaknya suku yang lebih besar daripada $\bar{l} + \epsilon$, di mana ϵ adalah sebarang bilangan positif.

Sebuah bilangan $\underline{l}$ disebut limit inferior, limit terkecil atau limit bawah (lim inf atau $\underline{\lim}$) dari suatu barisan $\{u_n\}$ jika tak terhingga banyaknya suku-suku barisan lebih kecil daripada $\underline{l} + \epsilon$ tetapi hanya terdapat terhingga banyaknya suku yang lebih kecil daripada $\underline{l} - \epsilon$, di mana ϵ adalah sebarang bilangan positif.

Ini serupa dengan titik-titik limit yang terkecil dan terbesar dari sebuah himpunan bilangan yang umum. Jika terdapat tak terhingga banyaknya suku dari $\{u_n\}$ yang melebihi sebarang bilangan positif M, maka kita menyatakan $\limsup \{u_n\} = \infty$. Jika tak terhingga banyaknya suku adalah lebih kecil daripada $-M$, di mana M adalah sebarang bilangan positif, maka kita mendefinisikan $\liminf \{u_n\} = -\infty$.

Jika $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, maka kita mendefinisikan $\limsup \{u_n\} = \liminf \{u_n\} = \infty$.

Jika $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$, maka kita mendefinisikan $\limsup \{u_n\} = \liminf \{u_n\} = -\infty$.

Walaupun setiap barisan yang terbatas tidak selalu konvergen, namun barisan tersebut selalu memiliki lim sup dan lim inf yang terhingga. Suatu barisan $\{u_n\}$ adalah konvergen jika dan hanya jika $\limsup u_n = \liminf u_n$ terhingga nilainya.

2.8 INTERVAL BERSARANG

Perhatikan sebuah himpunan interval $[a_n,\ b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, di mana setiap interval yang terkandung di dalam interval sebelumnya dan $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Interval-interval semacam semacam itu disebut interval-interval bersarang (nested interval). Kita dapat membuktikan bahwa untuk setiap himpunan interval-interval bersarang terdapat satu dan hanya satu bilangan real.

2.9 KRITERIA KONVERGENSI CAUCHY

Kriteria konvergensi Cauchy menyatakan bahwa suatu barisan $\{u_n\}$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ kita dapat menentukan sebuah bilangan N sedemikian sehingga $|u_p - u_q| < \epsilon$ untuk semua $p, q > N$. Kriteria ini memiliki keuntungan bahwa kita tidak perlu mengetahui limit l untuk memperlihatkan konvergensi.

2.10 DERET TAK TERHINGGA

Misalkan $u_1, u_2, u_3, \ldots$ adalah sebuah barisan tertentu. Susunlah sebuah barisan baru $s_1, s_2, s_3, \ldots$ di mana

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots, S_N = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

Di mana S_n, yang disebut jumlah persial ke-n, adalah jumlah n suku dari barisan $\{u_n\}$. Barisan $S_1, S_2, S_3, \ldots$ dituliskan sebagai

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

yang disebut sebuah deret tak terhingga. Jika $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ada, maka deret disebut konvergen dan S adalah jumlahnya. Tetapi, jika $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ tidak ada, maka deret disebut divergen.

Pembahasan mengenai deret tak terhingga dan topik-topik lain yang berkaitan dengan barisan-barisan lebih lanjut diberikan pada Bab 11.

2.11 CONTOH SOAL

BARISAN

2.1. Tuliskan lima suku pertama dari setiap barisan berikut ini.

a) $\left\{\frac{2n-1}{3n+2}\right\}$

b) $\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$

c) $\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \frac{7}{14}, \frac{9}{17}$

d) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \frac{-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}$

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

f) $\frac{x}{1!}, \frac{-x^3}{3!}, \frac{x^5}{5!}, \frac{-x^7}{7!}, \frac{x^9}{9!}$

g) $\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\right\}$

h) $\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right\}$

i) $\frac{2}{1^3}, 0, \frac{2}{3^3}, 0, \frac{2}{5^3}$

j) $\left\{\frac{1^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right\}$

Perhatikan bahwa $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$. Jadi $1! = 1, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, 5!$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, dan seterusnya. Selain itu, kita mendefinisikan $0! = 1$.

2.2. Dua mahasiswa diminta menuliskan suku ke-n dari barisan $1, 16, 81, 256, ...$ dan menuliskan suku ke-5 dari barisan tersebut. Satu mahasiswa memberikan suku-n sebagai $u_n = n^4$. Mahasiswa yang lain, yang tidak mengetahui hukum yang sederhana ini, menuliskan $u_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$. Mahasiswa yang manakah yang memberikan suku-5 yang benar?
Jika $u_n = n^4$ maka $u_1 = 1^4, u_2 = 2^4 = 16, u_3 = 3^4 = 81, u_4 = 4^4 = 256$ yang sesuai dengan keempat suku pertama dari barisan tersebut. Maka mahasiswa pertama memberikan suku ke-5 sebagai $u_5 = 5^4 = 625$.

Jika $u_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$, maka $u_1 = 1, u_2 = 16, u_3 = 81, u_4 = 256$ yang sesuai dengan keempat suku pertama yang diketahui. Maka, mahasiswa kedua memberikan suku-5 sebagai $u_5 = 601$.

Kedua mahasiswa tersebut benar. Dengan hanya memberikan sejumlah tertentu suku dari sebuah barisan tidak mendefinisikan suku-n yang unik.
Sesungguhnya, terdapat tak terhingga banyaknya suku-n yang mungkin.

LIMIT SUATU BARISAN

2.3. Sebuah barisan memiliki suku ke-n yang ditentukan oleh $u_n = \frac{3n-1}{4n+5}$.
(a) Tuliskanlah suku-suku ke-1, ke-5, ke-10, ke-100, ke-1000, ke-10.000, ke-100.000 dari barisan tersebut dalam bentuk desimal. Buat dugaaan mengenai besarnya limit barisan ini pada saat $n \to \infty$. Dengan menggunakan definisi limit buktikanlah bahwa dugaan pada (a) sesungguhnya benar

(a) $n = 1 \quad n = 5 \quad n = 10 \quad n = 100 \quad n = 1000 \quad n = 10.000 \quad n = 100.000$
$0{,}22222 \ldots 0.56000 \ldots 0{,}64444 \ldots 0{,}73827 \ldots 0{,}74881 \quad 0{,}74988 \ldots \quad 0{,}74998$

Dugaan yang baik adalah bahwa limitnya adalah $0{,}75000 \ldots = \frac{3}{4}$. Perhatikan bahwa limit tersebut hanya untuk nilai-nilai n yang cukup besar sehingga limit yang mungkin dapat diketahui.

(b) Kita harus memperhatikan bahwa untuk sebarang $\epsilon > 0$ yang diketahui (seberapapun kecilnya) terdapat sebuah bilangan N (yang tergantung pada ϵ) sedemikian sehingga $\left|u_n - \frac{3}{4}\right| < \epsilon$ untuk semua $n > N$.
Maka $\left|\frac{3n-1}{4n+5} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{-19}{4(4n+5)}\right| < \epsilon$ jika $\frac{-19}{4(4n+5)} < \epsilon$

Atau $\frac{4(4n+5)}{-19} > \frac{1}{\epsilon}, 4n + 5 > \frac{19}{4\epsilon}, n > \frac{1}{4}\left(\frac{19}{4\epsilon} - 5\right)$
Dengan memilih $N = \frac{1}{4}\left(\frac{19}{4\epsilon} - 5\right)$, kita melihat bahwa $\left|u_n - \frac{3}{4}\right| < \epsilon$ untuk semua $n > N$, sehingga $\lim_{n\to\infty} u_n - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ dan bukti tersebut menjadi lengkap. Perhatikan bahwa jika $\epsilon = 0{,}001$ (misalnya), maka $N = \frac{1}{4}\left(\frac{19000}{4} - 5\right) = 1184\frac{1}{4}$. Ini berarti bahwa semua suku dari barisan setelah suku ke-1186 berbeda dari $\frac{3}{4}$ dalam nilai mutlak kurang dari 0,001.

2.4. Buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0$ di mana $c \neq 0$ dan $p > 0$ adalah konstanta (tergantung pada n). Kita harus memperlihatkan bahwa untuk sebarang $\epsilon > 0$ terdapat sebuah bilangan N sedemikian sehingga $\left|\frac{c}{n^p - 0}\right| < \epsilon$ untuk semua $n > N$. Maka $\left|\frac{c}{n^p}\right| < \epsilon$ jika $\frac{|c|}{n^p} < \epsilon$, yaitu $n^p > \frac{|c|}{\epsilon}$ atau $n > \left(\frac{|c|}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}}$. Dengan memilih $N = \left(\frac{|c|}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}}$ (tergantung pada ϵ), kita melihat bahwa $\left|\frac{c}{n^p}\right| < \epsilon$ untuk semua $n > N$,yang membuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{n^p}\right) = 0$.

2.5. Buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2 \cdot 10^n}{5+3 \cdot 10^n} = \frac{2}{3}$.
Kita harus memperlihatkan bahwa untuk sebarang $\epsilon > 0$ terdapat sebuah bilangan N sedemikian rupa sehingga $\left|\frac{1+2 \cdot 10^n}{5+3 \cdot 10^n} - \frac{2}{3}\right| < \epsilon$ untuk semua $n > N$.
Maka $\left|\frac{1+2 \cdot 10^n}{5+3 \cdot 10^n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{-7}{3(5+3 \cdot 10^n)}\right| < \epsilon$ jika $\left|\frac{7}{3(5+3 \cdot 10^n)}\right| < \epsilon$,
yaitu jika $\frac{3}{7}(5 + 3 \cdot 10^n) > \frac{1}{\epsilon}$, $3 \cdot 10^n > \frac{7}{3}\epsilon - 5, 10^n > \frac{1}{8}\left(\frac{7}{3}\epsilon - 5\right)$
atau $n > \log_{10}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{7}{3}\epsilon - 5\right)\right\} = N$, yang membuktikan keberadaan N sehingga membuktikan hasil yang dicari. Perhatikanlah bahwa nilai N diatas

adalah real hanya jika $\frac{7}{3}\epsilon - 5 > 0$, yaitu $0 < \epsilon < \frac{7}{15}$. Jika $\epsilon \geq \frac{7}{15}$, kita melihat bahwa $\left|\frac{1+2 \cdot 10^n}{5+3 \cdot 10^n} - \frac{2}{3}\right| < \epsilon$ untuk semua $n > 0$.

2.6. Jelaskanlah apa yang dimaksud dengan pertanyaan

(a) $\lim_{n\to\infty} 3^{2n-1} = \infty$, (b) $\lim_{n\to\infty} (1 - 2n) = -\infty$

(a) Jika untuk setiap bilangan positif M kita dapat menentukan sebuah bilangan postif N (tergantung pada M) sehingga $a_n > M$ untuk semua $n > N$, maka kita menulis $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Dalam kasus ini,

$3^{2n-1} > M$ jika $(2n-1)\log 3 > \log M$, yaitu $n > \frac{1}{2}\left(\frac{\log M}{\log 3} + 1\right) = N$.

(b) Jika untuk setiap bilangan positif M kita dapat menuliskan sebuah bilangan positif N (tergantung pada M) sehingga $a_n < -M$ untuk semua $n > N$, maka kita menulis $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Dalam kasus ini,

$1 - 2n < -M$ jika $2n - 1 > M$, atau $n > \frac{1}{2}(M + 1) = N$.

Disini ditekankan bahwa penggunaan lambang ∞ dan $-\infty$ untuk limit tidak dimaksudkan untuk mengimplikasikan konvergensi dari barisan yang diketahui karena ∞ dan $-\infty$ adalah bukan bilangan. Sebaliknya, ini adalah lambang yang digunakan untuk menjelaskan bahwa barisan tersebut divergen dengan cara khusus.

2.7. Buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ jika $|x| < 1$.

Metode 1:

Kita dapat membatasi diri kita pada $x \neq 0$, karena jika $x = 0$, maka hasilnya sudah pasti benar. Jika diketahui $\epsilon > 0$, kita harus memperlihatkan bahwa terdapat N sedemikian sehingga $|x^n| < \epsilon$ untuk $n > N$. Maka $|x^n| = |x^n| < \epsilon$ jika $n \log_{10}|x| < \log_{10}\epsilon$. Dengan membaginya dengan $\log_{10}|x|$, yang ada adalah negatif, akan menghasilkan $n > \frac{\log_{10}\epsilon}{\log_{10}|x|} = N$, yang membuktikan hasil yang dicari.

Metode 2:

Misalkan $|x| = \frac{1}{(1+p)}$, dimana $p > 0$. Menurut ketidaksamaan Bernoulli (Soal 1.31, Bab 1), kita memperoleh $|x^n| = |x^n| = 1(1+p)^n < \frac{1}{(1+np)} < \epsilon$ untuk semua $n > N$. Jadi $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

TEOREMA LIMIT BARISAN

2.8. Buktikanlah bahwa jika $\lim_{n\to\infty} u_n$ ada, maka limit tersebut unik.

Kita harus memperlihatkan bahwa jika $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ dan $\lim_{n\to\infty} u_n = l^2$, maka $l_1 = l_2$. Menurut hipotesis, jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$, maka kita dapat menentukan N sehingga

$|u_n - l_1| < \frac{1}{2}\epsilon$ jika $n > N$, $\quad |u_n - l_2| < \frac{1}{2}\epsilon$ jika $n > N$

Maka,

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

yaitu, $|l_1 - l_2|$ adalah lebih kecil dari sebarang ϵ positif (seberapapun kecilnya) sehingga harus dengan nol. Jadi, $l_1 = l_2$

2.9. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dan $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, maka buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$. Kita harus memperlihatkan bahwa untuk sebarang $\epsilon > 0$, kita dapat menentukan $N > 0$ sedemikian rupa sehingga $(a_n + b_n) - (A + B) < \epsilon$ untuk semua $n > N$.

Dari sifat nilai mutlak , halaman 3, maka kita memperoleh

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n + B|$$

Menurut hipotesis, jika diketahui $\epsilon > 0$, kita dapat menentukan N_1 dan N_2, sedemikian sehingga

$$|a_n - A| < \frac{1}{2}\epsilon \text{ untuk semua } n > N_1$$

$$|b_n - B| < \frac{1}{2}\epsilon \text{ untuk semua } n > N_2$$

Maka dari persamaan (1), (2), dan (3)

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon \text{ untuk semua } n > N$$

Di mana N dipilih sebagai N_1 dan N_2 yang lebih besar. Jadi, hasil yang dicari dapat diperoleh.

2.10 Buktikanlah bahwa semua barisan konvergen adalah barisan terbatas.

Jika diketahui $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, kita harus memperlihatkan bahwa terdapat sebuah bilangan positif P sedemikian rupa sehingga $|a_n| < P$ untuk semua n. Maka

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A|$$

Tetapi, menurut hipotesis kita dapat menentukan N sedemikian rupa sehingga $|a_n - A| < \epsilon$ untuk semua $n > N$, yaitu

$$|a_n| < \epsilon + |A| \text{ untuk semua } n > N$$

Maka $|a_n| < P$ untuk semua n jika kita memilih P sebagai yang terbesar dari bilangan $a_1, a_2, \dots, a_N, \epsilon + |A|$.

2.11. Jika $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$, maka buktikanlah bahwa terdapat sebuah bilangan N sehingga $|b_n| > \frac{1}{2}|B|$ untuk semua $n > N$.

Karena $B = B - b_n + b_n$, maka kita memperoleh: (1) $|B| \leq |B - b_n| + |b_n|$. Maka kita dapat memilih N sedemikian rupa sehingga

$|B - b_n| = |b_n - B| < \frac{1}{2}|B|$ untuk semua $n > N$, karena $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ menurut hipotesis. Sehingga, dari persamaan (1), $|B| < \frac{1}{2}|B| + |b_n|$ atau $|b_n| > \frac{1}{2}|B|$ untuk semua $n > N$.

2.12. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dan $\lim_{n\to\infty} b_n = B$,
maka buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$.
Dengan menggunakan Soal 2.10, kita memperoleh,

$$|a_n b_n - AB| = |a_n(b_n - B) + B(a_n - A)| \le |a_n||b_n - B| + |B||a_n - A|$$
$$\le P|b_n - B| + (|B| + 1)|a_n - A|$$

Tetapi, karena $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dan $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, maka jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$ kita dapat menemukan N_1 dan N_2 sedemikian sehingga $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2P}$ untuk semua $n > N_1$, $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2(|B|+1)}$ untuk semua $n > N_2$. Sehingga, dari persamaan (1), $|a_n b_n - AB| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$ untuk semua $n > N$, dimana N adalah N_1 dan N_2 yang lebih besar. Jadi, hasil tersebut terbukti.

2.13. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dan $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$, maka buktikanlah bahwa
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$,
(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$. Perhatikan langkah-langkah dibawah ini
(a) Kita harus memperlihatkan bahwa untuk sebarang $\epsilon > 0$ yang diketahui, kita dapat menentukan N sedemikian sehingga

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - b_n|}{|B||b_n|} < \epsilon \text{ untuk semua } n > N$$

Menurut hipotesis, jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$, kita dapat menentukan N_1 sedemikian sehinggga $|b_n - B| < \frac{1}{2}B^2\epsilon$ untuk semua $n > N_1$.
Selain itu, karena $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$, kita dapat menentukan N_2 sehingga $|b_n| > \frac{1}{2}|B|$ untuk semua $n > N_2$ (Lihat Soal 2.11).
Dengan demikian, jika N adalah N_1 dan N_2 yang lenih besar, kita dapat menuliskan persamaaan (1) sebagai

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|B||b_n|} < \frac{\frac{1}{2}B^2\epsilon}{|B| \cdot \frac{1}{2}|B|} = \epsilon \text{ untuk semua } n > N$$

dan bukti tersebut telah lengkap.
(b) Dari bagian (a) dan Soal 2.12, maka kita memperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

2.14. Hitunglah masing-masing dari yang berikut ini, dengan menggunakan teorema limit

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 2n - 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{n}}{5 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}} = \frac{3+0}{5+0+0} = \frac{3}{5}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n^3 + n^2 + 2n}{(n+1)(n^2+1)}\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}\right\}$

$$= \frac{1+0+0}{(1+0)(1+0)} = 1$$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

(d) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$

Karena limit-limit pada pembilang dan penyebut berturut-turut sama dengan 3 dan 0, maka limit tersebut tidak ada.

Karena $\frac{3n^2+4n}{2n-1}>\frac{3n^2}{2n}=\frac{3n}{2}$ dapat dibuat lebih besar daripada sebarang bilangan positif M dengan memilih $n>N$, maka jika diinginkan, kita dapat menulis $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{2n-1}=\infty$.

(e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+7}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{3+\frac{7}{n}}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

(f) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^5-4n^2}{3n^7+n^3-10}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^5}}{3+\frac{1}{n^4}-\frac{10}{n^7}}=\frac{0}{3}=0$

(g) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{-n}+2}{5\cdot 10^{-n}+3}$ (Bandingkan dengan soal 2.5)

BARISAN MONOTONIK TERBATAS

2.15. Buktikanlah bahwa barisan dengan suku-n $u_n=\frac{2n-7}{3n+2}$, (a) bertambah secara monotonik, (b) terbatas diatas, (c) terbatas di bawah, (d) terbatas, (e) memiliki sebuah limit.

(a) $\{u_n\}$ bertambah secara monotonik jika $u_{n+1}\geq u_n, n=1,2,3,\ldots$ Maka $\frac{2(n+1)-7}{2(n+1)+2}\geq\frac{2n-7}{3n+2}$ jika dan hanya jika $\frac{2n-5}{2n+5}\geq\frac{2n-7}{3n+2}$ atau, $(2n-5)(3n+2)\geq(2n-7)(3n+5), 6n^2-11n-10\geq 6n^2-11n-35$, yaitu $-10\geq-35$, yang memang benar. Jadi, dengan membalikkan langkah-langkah dalam ketidaksamaan, kita dapat melihat bahwa $\{u_n\}$ bertambah secara monotonik. Sesungguhnya, karena $-10>-35$ maka barisan tersebut bertambah sepenuhnya.

(b) Dengan menuliskan beberapa suku dari barisan tersebut, kita dapat menduga bahwa sebuah batas atas adalah 2 (misalnya). Untuk membuktikan hal ini, maka kita harus memperlihatkan bahwa $u_n\leq 2$. Jika $\frac{(2n-7)}{(3n+2)}\leq 2$ maka $2n-7\leq 6n+4$ atau $-4n<11$, yang memang benar. Pembalikan langkah membuktikan bahwa 2 adalah sebuah batas atas.

(c) Karena barisan khusus ini bertambah secara monotonik, maka suku pertama yaitu -1 adalah sebuah batas bawah, yaitu $u_n\geq-1, n=1,2,3,\ldots$ setiap bilangan yang lebih kecil daripada -1 adalah juga sebah batas bawah.

(d) Karena barisan tersebut memiliki sebuah batas atas dan sebuah batas bawah, maka barisan tersebut terbatas. Jadi ,sebagai contoh kita dapat menulis $|u_n|\leq 2$ untuk semua n.

(e) Karena setiap barisan yang terbatas secara monotonik (bertambah tau berkurang) memiliki sebuah limit, maka barisan yang diketahui tersebut memiliki sebuah limit. Dalam hal ini, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-7}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{7}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$

2.16. Sebuah barisan $\{u_n\}$ didefenisikan oleh rumus $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}, u_1 = 1$.

(a) Buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} u_n =$ ada.

(b) Tentukanlh limit pada (a)

(a) Suku-suku barisan tersebut adalah $u_1 = 1, u_2 = \sqrt{3u_1} = 3^{\frac{1}{2}}, u_3 = \sqrt{3u_2} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$, ... Suku ke-$n$ ditentukan oleh $u_n = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2}^{n-1}}$ sebagaimana dapat dibuktikan dengan induksi metematika (Bab1). Jelaslah bahwa $u_{n+1} \geq u_n$. Ini berarti barisan tersebut bertambah secra monotonik. Menurut soal 1.14, Bab 1, $u_n \leq 3^1 = 3$, yaitu u_n terbatas diatas. Sehingga, $u_n$adalah terbatas (karena batas bawah sama dengan nol). Jadi, terdapat sebuah limit, karena barisan tersebut terbatas dan bertambah secara monotonik.

(b) Misalkan $x =$ limit yang dicari, karena $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3u_n}$, maka kita memperoleh $x = \sqrt{3x}$ dan $x = 3$. (kemungkinan yang lain, $x = 0$ tidak termasuk karena $u_n \geq 1$).

Metode lain: $\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2}^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} 3^{1-\frac{1}{2}^{n}} = 3 \lim_{n\to\infty} {}^{\left(1-\frac{1}{2}^{n}\right)} = 3^1 = 3$

2.17. Buktikanlah kebenaran entri-entri dalam tabel berikut ini

Barisan	Terbatas	Bertambah secara monotonik	Berkurang secara monotonik	Limit ada
$2; 1{,}9; 1{,}8; 1{,}7 \ldots, 2-(n-1)/10; \ldots$	Tidak	Tidak	Ya	Tidak
$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$	Ya	Tidak	Tidak	Tidak
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots, (-1)^{n-1}/(n+1)$	Ya	Tidak	Tidak	Ya (0)
$0{,}6; 0{,}66; 0{,}666; \ldots, \frac{2}{3}(1-1/10^n)$	Ya	Ya	Tidak	Ya $\left(\frac{2}{3}\right)$
$-1, +2, -3, +4, -5, \ldots, (-1)^n n$	Tidak	Tidak	Tidak	Tidak

2.18. Buktikanlah barisan dengan bentuk ke-n $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ adalah monotonik, bertambah dan terbatas, dan karenanya terdapat sebuah limit. Limit tersebut dilambangkan dengan simbol e.

Perhatikan: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, di mana $e \cong 2{,}71828 \ldots$ diperkenalkan pada abad ke delapan belas oleh Leonhart Euler sebagai basis untuk suatu sistem logaritma dengan tujuan menyederhanakan rumus-rumus diferensiasi dan integrasi tertentu. Menurut Teorema Binomia, jika n adalah sebuah bilangan bulat positif (lihat Soal 1.95, Bab 1), maka

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}x^n$$

Dengan memisalkan $x = \frac{1}{n}$, maka

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Karena setiap suku setelah dua suku pertama dalam pernyataan terakhir adalah sebuah fungsi n yang bertambah, maka barisan $u_n$tersebut adalah barisan yang bertambah secara monotonik.

Disini juga jelas bahwa

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Menurut Soal 1.14, Bab 1.

Jadi, u_n terbatas dan bertambah secara monotonik, sehingga memiliki sebuah limit yang kita nyatakan sebagai e. Nilai $e = 2{,}71828$..

2.19. Buktikanlah bahwa $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, di mana $x \to \infty$ dengan cara apapun (yaitu, tidak selalu dalam bilangan bulat positif, seperti pada Soal 2.18).

Jika $n =$ bilangan bulat terbeesar $\leq x$, maka

$n \leq x \leq n+1$ dan $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

karena, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e$

dan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$

maka $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$

BATAS ATAS TERKECIL, BATAS BAWAH TERBESAR, LIMIT SUPERIOR, LIMIT INFERIOR

2.20. Tentukanlah (a) batas atas terkecil

(b)batas bawah terbesar,

(c) lim sup $\left(\overline{\lim}\right)$, dan

(d) lim inf $\left(\underline{\lim}\right)$ untuk barisan $2, -2, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Sebagai berikut:

(a) Batas atas terkecil $= 2$, karena semua suku lebih kecil atau sama dengan 2, sementara terdapat sedikitnya satu suku (suku pertama) yang lebih besar daripada $2 - \epsilon$ untuk sebarang $\epsilon > 0$.

(b) Bawah terbesar $= -2$, karena semua suku lebih besar atau sama dengan -2 sementara terdapat sedikitnya satu suku (suku kedua) yang lebih kecil daripada $-2 + \epsilon$ untuk sebarang $\epsilon > 0$.

(c) Lim sup atau $\overline{\lim} = 1$, karena tak terhingga banyaknya suku barisan tersebut yang lebih besar dari $1 - \epsilon$ untuk sebarang $\epsilon > 0$ (yaitu, semua bilangan 1 dalan barisan tersebut), sementara hanya terhingga banyaknya suku yang lebih besar dari $1 + \epsilon$ untuk sebarang $\epsilon > 0$ (yaitu, suku pertama).

(d) Lim inf atau $\underline{\lim} = -1$, karena tak terhingga banyaknya suku barisan tersebut yang lebih kecil daripada $-1 + \epsilon$ untuk sebarang $\epsilon > 0$ (yaitu, semua bilangan -1 dalam barisan tersebut), sementara hanya terhingga banyaknya suku yang lebih kecil dari $-1 - \epsilon$ untuk sebarang $\epsilon > 0$ (yaitu, suku kedua).

2.21. Tentukanlah (a) batas atas terkecil, (b) batas bawah terbatas, (c) lim sup $(\overline{\lim})$, dan (d) lim inf $(\underline{\lim})$ untuk barisan dalam Soal 2.17. Hasil-hasilnya ditampilkan pada tabel berikut

Barisan	Batas atas terkecil	Batas bawah terbesar	Lim sup atau $\overline{\lim}$	Lim inf atau $\underline{\lim}$
$2; 1{,}9; 1{,}8; 1{,}7 \ldots, -(n-1)/10; \ldots$	2	Tidak ada	$-\infty$	$-\infty$
$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$	1	-1	1	-1
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots, (-1)^{n-1}/(n+1)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
$0{,}6; 0{,}66; 0{,}666; \ldots, \frac{2}{3}(1 - 1/10^n)$	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-1, +2, -3, +4, -5, \ldots, (-1)^n n$	Tidak ada	Tidak ada	$+\infty$	$-\infty$

INTERVAL BERSARANG

2.22. Buktikanlah bahwa setiap bilangan untuk setiap himpunan interval bersarang $[a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \ldots$, terdapat satu dan hanya satu bilangan real. Menurut, definisi interval bersarang, maka $a_{n+1} \geq a_n, b_{n+1} \leq b_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ dan $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$. Karenanya $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$, dan barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ adalah terbatas dan berturut-turut bertambah secara monotonik dan berkurang secara monotonik sehingga konvergen terhadap a dan b. Untuk memperlihatkan bahwa $a = b$ dan sehingga membuktikan hasil yang dicari, kita tuliskan

$$b - a = (b - b_n) + (b_n - a_n) + (a_n - a)$$
$$|b - a| \leq |b - b_n| + |b_n - a_n| + |a_n - a|$$

Maka, jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$, kita dapat menentukan N sedemikian sehingga untuk semua $n > N$

$$|b - b_n| < \frac{\epsilon}{3}, \quad |b_n - a_n| < \frac{\epsilon}{3}, \quad |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3}$$

Sehingga dari persamaan (2), $|b - a| < \epsilon$. Karena ϵ adalah sebarang bilangan positif, maka kita mendapatkan $b - a = 0$ atau $a = b$.

2.23. Buktikanlah Teorema Weierstrass-Bolzano (lihat halaman 5)

Asumsikan himpunan tak terhingga terbatas berada dalam interval terhingga $[a, b]$. Bagilah interval ini menjadi dua interval yang sama. Maka setidaknya satu dari interval ini, yang ditulis $[a_1, b_1]$, mengandung tak terhingga banyaknya titik. Dengan membagi $[a_1, b_1]$ ke dalam dua interval yang sama kita memperoleh interval lain, katakanlah $[a_2, b_2]$, yang mengandung tak terhingga banyaknya titik. Dengan melanjutkan proses ini, kita memperoleh himpunan interval $[a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \ldots$, dengan setiap interval berada dalam interval sebelumnya sedemikian sehingga

$$b_{1-}a_1 = \frac{(b-a)}{2}, b_2 - a_2 = \frac{(b_1 - a_1)}{2} = \frac{(b-a)}{2^2}, \ldots, b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^n}$$

Sehingga kita melihat bahwa $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Himpunan interval bersarang ini, menurut soal 2.22 sam dengan sebuah bilangan real yang mempresentasikan sebuah titik limit dan karenanya membuktikan teorema tersebut.

KRITERIA KONVERGENSI CAUCHY

2.24. Buktikanlah Kriteria Konvergensi Cauchy sebagaimana dinyatakan pada halaman 20. Syarat perlu,

Misalkan barisan $\{u_n\}$ konvergen l. Dari asumsi ini, jika diketahui sebarang $\epsilon > 0$, kita dapat menentukan N sedemikian sehingga

$|u_p - l| < \frac{\epsilon}{2}$ untuk semua $p > N$ dan $\left|u_q - l < \frac{\epsilon}{2}\right|$ untuk semua $q > N$

Karenanya untuk $p > N$ dan $q > N$, kita memperoleh

$|u_p - u_q| = |(u_p - l) + (l - u_q)| \leq |u_p - l| + |l - u_q| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

Syarat cukup. Misalkan $|u_p - u_q| < \epsilon$ untuk semua $p, q > N$ dan sebarang ϵ >0. Kemudian semua bilangan u_N, u_{N+1}, ... terletak dalam interval terbatas, yaitu himpunan tersebut terbatas dan terhingga. Oleh karena itu, menurut Teorema Weierstrass-Bolzano terdapat sedikitnya satu titik limit, misalnya a. Jika a adalah satu-satunya titik limit, maka kita memperoleh bukti yang diinginkan dan $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. Misalkan terdapat dua titik limit yang berbeda, katakanlah a dan b, dan misalkan $b > a$ (lihat Gambar 2.1). Menurut definisi titik limit, kita memperoleh

Gambar 2.1

$|u_p - a| < \frac{(b-a)}{3}$ untuk nilai p yang tak terhingga banyaknya (1)

$\left|u_q - a\right| < \frac{(b-a)}{3}$ untuk nilai q yang tak terhingga banyaknya (2)

Karena $b - a = \left(b - u_q\right) + \left(u_q - u_p\right) + \left(u_p - a\right)$, kita memperoleh

$$|b - a| = b - a \leq \left|b - u_q\right| + \left|u_p - u_q\right| + \left|u_p - a\right| \quad (3)$$

Dengan menggunakan persamaan (1) dan (2) ke dalam (3), kita melihat bahwa $\left|u_p - u_q\right| > \frac{(b-a)}{3}$ untuk nilai p dan ϵ yang tak terhingga banyaknya sehingga bertentangan dengan hipotesis bahwa $\left|u_p - u_q\right| < \epsilon$ untuk $p, q > N$ dan sebarang $\epsilon > 0$. Dengan demikian, hanya terdapat satu titik limit dan teorema tersebut terbukti.

DERET TAK TERHINGGA

2.25. Buktikanlah bahwa deret tak terhingga (kadang-kadang disebut deret ukur atau deret geometri).

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

(a) Konvergen ke $\frac{a}{(1-r)}$ jika $|r| < 1$, (b) divergen jika $|r| \geq 1$.

Misalkan $\quad s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$

Maka $\quad rs_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + a^n$

Kurangkan $\quad (1-r)s_n = \quad -a^n$

atau,

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

- Jika $|r| < 1$, maka $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ menurut Soal 2.7.
- Jika $|r| < 1$, maka $\lim_{n\to\infty} S_n$ tidak ada (lihat Soal 2.44).

2.26. Buktikanlah bahwa jika sebuah deret adalah konvergen, maka suku ke-n nya harus mendekati nol.

Karena $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$, maka kita memperoleh $u_n = S_n - S_{n-1}$. Jika deret tersebut konvergen terhadap S, maka

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

2.27. Buktikanlah bahwa deret $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ divergen.

Metode 1:

$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0$ ternyata limit tersebut tidak ada. Dengan demikian, menurut Soal 2.26 deret tersebut tidak mungkin konvergen. Sehingga deret tersebut divergen.

Metode 2:

Barisan jumlah-jumlah parsial adalah $1, 1-1, 1-1+1, 1-1+1-1, \ldots$ yaitu $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ karena deret ini tidak memiliki limit, maka deret tersebut divergen.

2.12 SOAL LAIN-LAIN

2.28. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} = l$.

Misalkan $u_n = v_n + l$. Kita harus memperlihatkan bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{n} = 0$ jika $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Maka

$$\frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{n} = \frac{v_1+v_2+\cdots+v_p}{n} + \frac{v_{p+1}+v_{p+2}+\cdots+v_n}{n}$$

Sehingga

$$\left|\frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{n}\right| \leq \frac{|v_1+v_2+\cdots+v_p|}{n} + \frac{|v_{p+1}|+|v_{p+2}|+\cdots+|v_n|}{n}$$

Karena $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, maka kita dapat memilih P sehingga $|v_n| < \frac{\epsilon}{2}$ untuk $n > P$. Maka

$$\frac{|v_{p+1}| + |v_{p+2}| + \cdots + |v_n|}{n} < \frac{\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + \cdots + \frac{\epsilon}{2}}{n} = \frac{(n-P)\frac{\epsilon}{2}}{n} < \frac{\epsilon}{2}$$

Setelah memilih P maka kita dapat memilih N sehingga untuk $n > N > P$.

$$\frac{|v_1 + v_2 + \cdots + v_p|}{n} < \frac{\epsilon}{2}$$

Dengan menggunakan persamaan (2) dan (3), persamaan (1) menjadi

$$\frac{|v_1+v_2+\cdots+v_n|}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ untuk } n > N$$

Sehingga membuktikan hasil yang dicari.

2.29. Buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} (1 + n + n^2)^{\frac{1}{n}} = 1$,

Misalkan $(1 + n + n^2)^{\frac{1}{n}} = 1 + u_n$, di mana $u_n \geq 0$.

Menurut teorema binomial

$1 + n + n^2 = (1 + u_n)^n = 1 + nu_n + \frac{n(n-1)}{2!} u_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} u_n^3 + \cdots + u_n^n$

Maka $1 + n + n^2 > 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} u_n^3$ atau $0 < u_n^3 < \frac{6(n^2+n)}{n(n-1)(n-2)}$

Sehingga $\lim_{n\to\infty} u_n^3 = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Jadi, $\lim_{n\to\infty} (1 + n + n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (1 + u_n) = 1$.

2.30. Buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ untuk semua konstanta a.

Hasil tersebut diperoleh jika kita dapat membuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$ (lihat Soal 2.38). Kita dapat mengasumsikan $a \neq 0$. Misalkan $u_n = \frac{|a|^n}{n!}$. Maka $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{|a|}{n}$. Jika n cukup besar, misalnya $n > 2|a|$, dan jika kita menyebut $N = [2|a| + 1]$, yaitu bilangan bulat terbesar $\leq 2|a| + 1$, maka

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < \frac{1}{2}, \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < \frac{1}{2}, \ldots, \frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{1}{2}$$

Mengalikan ketidaksamaan ini akan menghasilkan

$$\frac{u_n}{u_N} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \text{ atau } u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N.$$

Karena $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = 0$ (dengan menggunakan Soal 2.7), maka $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

2.13 SOAL TAMBAHAN

BARISAN

2.31. Tuliskan empat suku pertama dari setiap barisan berikut ini:

(a) $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$, (b) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right\}$, (c) $\left\{\frac{(2x)^{n-1}}{(2n-1)^5}\right\}$, (d) $\left\{\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}\right\}$, (e) $\left\{\frac{\cos nx}{x^2+n^2}\right\}$

Jawab

(a) $\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{4}}{5}$ (d) $\frac{-x}{1}, \frac{x^3}{1\cdot 3}, \frac{-x^5}{1\cdot 3\cdot 5}, \frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$

(b) $\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}$ (e) $\frac{\cos x}{x^2+1^2}, \frac{\cos 2x}{x^2+2^2}, \frac{\cos 3x}{x^2+3^2}, \frac{\cos 4x}{x^2+4^2}$

(c) $\frac{1}{1^5}, \frac{2x}{3^5}, \frac{4x^2}{5^5}, \frac{8x^3}{7^5}$

2.32. Tentukanlah rumus suku-n yang mungkin untuk barisan dengan 5 suku pertama berikut ini dan tentukanlah suku ke-6

(a) $\frac{-1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{-5}{11}, \frac{7}{14}, \frac{-9}{17}, \ldots$ (b) $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ (c) $\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{4}{5}, \ldots$

Jawab

(a) $\frac{(-1)^n(2n-1)}{(3n+2)}$ (b) $\frac{1-(-1)^n}{2}$ (c) $\frac{(n+3)}{(n+5)} \cdot \frac{1-(-1)^n}{2}$

2.33. Barisan Fibonacci adalah barisan $\{u_n\}$ di mana $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ dan $u_1 = 1, u_2 = 1$.

(a) Tentukan 6 suku pertama barisan tersebut.

(b) Perlihatkanlah bahwa suku ke-n ditentukan oleh $u_n = \frac{(a^n - b^n)}{\sqrt{5}}$ dimana $a = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right), b = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$.

Jawab

(a) $1, 1, 2, 3, 5, 8$

LIIMIT SUATU BARISAN

2.34. Dengan menggunakan definisi limit, buktikan bahwa

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4-2n}{3n+2} = \frac{-2}{3}$, (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+1}{n^2} = \infty$,

(b) $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{-1}{\sqrt{n}}} = 1$, (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$,

2.35. Tentukanlah bilangan bulat positif terkecil N sedemikian sehingga $\left|\frac{(3n+2)}{(n-1)-3}\right| < \epsilon$ untuk semua $n > N$ jika

(a) $\epsilon = 0{,}01$ (b) $\epsilon = 0{,}001$ (c) $\epsilon = 0{,}0001$

Jawab

(a) 502, (b) 5002, (c) 50.002

2.36. Dengan menggunakan definisi limit, buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)}{(3n-1)}$ tidak mungkin $= \frac{1}{2}$.

2.37. Buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n$ tidak ada.

2.38. Buktikanlah bahwa jika $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$ maka $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
Apakah kebalikannya benar?

2.39. Jika $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, buktikanlah bahwa
(a) $\lim_{n\to\infty} cu_n = cl$ di mana c adalah sebarang konstanta
(b) $\lim_{n\to\infty} u_n^2 = l^2$
(c) $\lim_{n\to\infty} u_n^p = l^p$ di mana p adalah bilangan bulat positif
(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{l},\ l \geq 0$

2.40. Berikanlah bukti secara langsung bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ jika $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dan $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$.

2.41. Buktikanlah bahwa
(a) $\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$,
(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$,
(c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n} = 0$,

2.42. Jika $r > 1$, maka buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$, terangkanlah dengan hati-hati pentingnya pernyataan ini.

2.43. Jika $|r| > 1$, buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} r^n$ tidak ada

2.44. Hitunglah tiap limit berikut, dengan menggunakan teorema limit
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4-2n-3n^2}{2n^2+n}$
(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{(3-\sqrt{n})(\sqrt{n}+2)}{8n-4}}$
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2-5n+4}}{2n-7}$
(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^{2n}}{3 \cdot 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{2n-1}}$
(e) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$
(f) $\lim_{n\to\infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$

Jawab:
(a) $-\frac{3}{2}$ (d) -15
(b) $-\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (f) 3

BARISAN MONOTONIK

2.45. Buktikanlah bahwa barisan dengan suku ke-n $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

(a) berkurang secara monotonik,
(b) terbatas di bawah ,
(c) terbats di atas,
(d) memiliki sebuah limit

2.46. Jika $u_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} + \cdots + \frac{1}{n+n}$, maka buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} u_n$ ada dan terletak antara 0 dan 1.

2.47. Jika $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, $u_1 = 1$, maka buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

2.48. Jika $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{p}{u_n}\right)$ di mana $p > 0$ dan $u_1 > 0$, maka buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{p}$. Perhatikanlah bagaimana hasil ini dapat digunakan untuk menentukan $\sqrt{2}$.

2.49. Jika u_n bertambah secara monotonik (atau berkurang secara monotonik), buktikan bahwa $\frac{S_n}{n}$, di mana $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, juga bertambah secara monotonik (atau berkurang secara monotonik).

BATAS ATAS TERKECIL, BATAS BAWAH TERBESAR, LIMIT SUPERIOR, LIMIT INFERIOR

2.50. Tentukanlah batas atas terkecil, batas bawah terbesar, lim sup $(\overline{\lim})$, lim inf $(\underline{\lim})$ untuk setiap barisan berikut ini

(a) $-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{(-1)^n}{(2n-1)}, \dots$
(b) $\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \dots, \frac{-1^{n+1}(n+1)}{(n+2)}, \dots$
(c) $1, -3, 5, -7, \dots, (-1)^{n-1}(2n-1), \dots$
(d) $1, 4, 1, 16, 1, 36, \dots, n^{1+(-1)^n}, \dots$

Jawab:

(a) $\frac{1}{3}, -1, 0{,}0$
(b) $1, -1{,}1, -1$
(c) Tidak ada, tidak ada, $+\infty, -\infty$
(d) Tidak ada, 1, $+\infty, 1$

2.51. Buktikan bahwa sebuah barisan terbatas $\{u_n\}$ konvergen jika dan hanya jika $\overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n$..

DERET TAK TERHINGGA

2.52. Tentukan jumlah deret $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Jawab: 2

2.53. Hitunglah $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$.

Jawab: $\frac{1}{6}$

2.54. Buktikanlah bahwa $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1} = 1$

$\left[\text{Pentunjuk: } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$

2.55. Buktikanlah bahwa perkalian setiap suku dari sebuah deret tak terhingga dengan suatu konstanta (tidak nol) tidak mempengaruhi konvergensi atau devergensi tersebut deret tersebut.

2.56. Buktikanlah bahwa deret $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ divergen

$$\left[\begin{array}{l}\text{Petunjuk: Misalkan } S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\text{. Kemudian buktilah bahwa} \\ |S_n - S_n| > \dfrac{1}{2} \text{ yang bertentangan dengan Kriteria Konvergensi Chauchy}\end{array}\right]$$

2.14 SOAL LAINNYA

2.57. Jika $a_n \leq u_n \leq b_n$ untuk semua $n > N$ dan $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$, maka buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

2.58. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, dan θ tidak tergantung pada n, maka buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = 0$. Apakah hasil tersebut benar jika θ tergantung pada n?

2.59. Misalkan $S_n = \frac{1}{2}\{1 + (-1)^n\}, n = 1, 2,3, \ldots$ jika $S_n = u_1 + u_1 + \cdots + u_n$, maka buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}$.

2.60. Buktikanlah bahwa

(a) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

(b) $\lim_{n\to\infty} (a + n)^{\frac{p}{n}} = 1$ di mana a dan p konstanta.

2.61. Jika $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |a| < 1$, maka buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

2.62. Jika $|a| < 1$, maka buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} n^p\, a^n = 0$ di mana konstanta $p > 0$.

2.63. Buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{n^n} = 0$.

2.64. Buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} n\ \sin\frac{1}{n} = 1$. Petunjuk: Nyatakanlah sudut pusat, θ, Suatu lingkaran dalam radian. Ilustrasikanlah secara geometri bahwa $\sin\theta \leq \theta \leq \tan\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi$. Misalkan $\theta = \frac{1}{n}$. Amatilah bahwa karena n terbatas pada bilangan bulat positif, sudut tersebut terbatas kuadran pertama.

2.65. Jika $\{u_n\}$ adalah barisan Fibonacci (Soal 2.33), buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$.

2.66. Buktikanlah bahwa barisan $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n = 1, 2, 3, \ldots$ adalah sebuah barisan yang kurang secara monotonik yang limitnya sama dengan e. $\left[\text{Pentunjuk: Perlihatkanlah bahwa } \frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1.\right]$

2.67. Jika $a_n \geq b_n$ untuk semua $n > N$ dan $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, buktikan bahwa $A \geq B$.

2.68. Jika $|u_n| \leq |v_n|$ dan $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, maka buktikanlah bahwa $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

2.69. Buktikanlah $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] = 0$.

2.70. Buktikanlah bahwa $[a_n, b_n]$, di mana $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dan $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, adalah sebuah himpunan interval bersarang yang mendefenisikan bilangan e.

2.71. Buktikanlah bahwa setiap barisan terbatas (yang bertambah atau berkurang) secara monotonik memiliki sebuah limit.

2.72. Misalkan $\{u_n\}$ adalah sebuah barisan sehingga $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ di mana $a$dan b adalah konstanta. Ini disebut sebuah persamaan diferensial orde kedua untuk u_n.

(a) Dengan menganSumsikan bahwa solusi dengan bentuk $u_n = r^n$ di mana r adalah sebuah konstanta, buktikanlah bahwa r harus memenuhi persamaan $r^2 - ar - b = 0$.

(b) Gunakanlah (a) untuk memperlihatkan bahwa solusi persamaan diferensial tersebut (yang disebut solusi umum) adalah $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$, di mana A dan B adalah konstanta sebarang dan r_1 dan r_2 adalah dua solusi untuk $r^2 - ar - b = 0$ yang diasumsikan berbeda.

(c) Dalam kasus $r_1 = r_2$ dalam (b), perlihatkanlah bahwa solusi (umum) adalah $u_n = (A + B_n)r_1^n$.

2.73.Selesaikan persamaan diferensial berikut yang menenuhi ketentuan yang diberikan:

(a) $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, u_1 = 1, u_2 = 1$ (dibandingkanlah dengan Soal 2.34)

(b) $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, u_1 = 3\ , u_2 = 5$

(c) $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, u_1 = 2\ , u_2 = 8$

Jawab

(a) Sama dengan Soal 2.34

(b) $u_n = 2(3)^{n-1} + (-1)^{n-1}$

(c) $u_n = n \cdot 2^n$

DAFTAR INDEKS

GLOSARIUM

BARISAN
Barisan merupakan susunan dari bilangan real yang kita urutkan dengan mengunakan bilangan asli sehingga untuk setiap bilangan asli kita punya bilangan real dengan urutan ke-n.

BARISAN DIVERGEN
Barisan divergen merupakan yang tidak mempunyai limit.

BARISAN MONOTONIK
Barisan monotonik merupakan barisan yang apabila barisan tersebut naik saja atau turun saja.

BATAS ATAS
Batas atas adalah sebuah bilangan yang lebih besar atau sama dengan dari semua unsur dibarisan.

BATAS BAWAH
Batas atas adalah bilangan yang lebih kecil atau sama dengan dari semua unsur dibarisan.

BERTAMBAH SECARA MONOTONIK
Bertambah secara monotonik merupakan barisan yang naik atau bertambah saja.

DERET TAK TERHINGGA
Deret tak terhingga merupakan suatu deret yang banyak suku-sukunya tak terhingga.

INTERVAL-INTERVAL BERSARANG
Interval-interval bersarang merupakan sebuah interval yang terkandung didalam interval sebelumnya.

KONVERGENSI
Konvergensi maksudnya adalah mempunyai jumlah .

LIMIT
Limit dalam bahasa umum merupakan batas.

TEOREMA LIMIT
Teorema limit merupakan konsep dasar atau aturan untuk menyelesaikan soal limit.